Commerce & Management Quarterly, Vol. 4, No.3, pp. 229 ~ 237 (2003)

極值分配求估最大概似估計量的唯一性驗證

VERIFICATIONS OF THE UNIQUENESS FOR THE MLE OF THE EXTREME VALUE DISTRIBUTION

許瑞珍
嘉南藥理科技大學生活應用與保健系
陸海林
嘉南藥理科技大學資訊管理系

Jui-Chen Hsu
Department of Applied Life Science and Health

Hai-Lin Lu
Department of Management of Information Science
Chia-Nan University of Pharmacy and Science

摘　要

極值分配可以廣泛的應用在不同的領域中，特別是壽險、管理、工程的可靠度及生物上的臨床試驗。最大概似估計量是這個分配的一個很好的具有穩定性的估計量，本文提供驗證此最大概似估計量在一些資料型態下具有唯一的性質，並附上實例加以說明。

關鍵詞：最大概似估計量、極值分配、設限資料

ABSTRACT

Extreme value distribution is widely used in many areas, especially insurance, business, reliability in engineering and the trials in biostatistics. MLE（Maximum Likelihood Estimate） offers an optimum and stable estimation for the parameters of this distribution. In this article, we provide verifications for the uniqueness of the MLE. Some numerical examples are given for illustration.

Key words: Maximum Likelihood Estimate, Extreme-value Distribution, censored data.

壹、前言

極值分配被廣泛的應用在商業的壽險（Insurance）理論、財政（Finance）、工業上的可靠度（Reliability）與生物統計的存活分析等諸多領域上（可參考 Reiss & Thomas, 2001）。通常極值分配有三種型態，分別為 Gumbel, Fréchet 及 Weibull，對於這三種型態的分配，其詳細敘述可查 Gumbel（1958）與 Reiss and Thomas（2001）的著作。本文討論 Gumbel 模式的兩參數的極值分配，其機率密度函數與累積機率分配分別為：

$$f(x)=\frac{1}{\sigma}\,e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\exp\{-e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\},\quad -\infty<x<\infty \quad (1)$$

及 $F(x)=1-\exp\{-e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\}$，

其中 $\sigma>0$，$-\infty<\mu<\infty$，且 μ 為位置（location）參數，σ 為形狀（shape）參數。

許多的作者討論對此分配兩個參數的估計，最常用的為最大概似估計（Maximum Likelihood Estimation: Lawless, 1982; Kimball, 1946），動差估計（Moment Estimate: Kimball, 1956; Dekkers et al., 1989），修正的動差估計（Modified Moment Estimate: Balakrishnan & Cohen, 1991），最小平方估計（Least Square Estimate: Shimokawa & Liao, 1999）與最佳線性不偏估計（Best Linear Unbiased Estimate: Kimball, 1956; Blom, 1958; Weiss, 1961）….等，其中 MLE 為一致（Consistent）且為漸近有效估計量，在 MLE 所求之估計量的機率分配為漸近常態（Asymptotically normal），而且 MLE 為此極值分配的一個良好的估計量。然而當我們計算 MLE 過程中需利用起始值及一些標準的疊代（iterated process）程序來求解。若起始值給的不恰當時，可能會無解或得到不適當的解，甚至也不知道解是否一定存在（Azzalini, 1996）。本文驗證對完全資料及一些設限（censored）資料在極值分配下其 MLE 具有唯一性，如此一來，在使用此分配將極為便利。本文的架構如下：第二節驗證在不同的資料下，極值分配的 MLE 的解為唯一的，第三節舉例說明我們的結果。

貳、驗證唯一性

一、完全資料

假設隨機變數 $X_1,\cdots,X_n$ 為來自兩參數的極值分配如(1)所述，故其概似函數（Likelihood function）為：

$$L(X_1,\cdots,X_n;\mu,\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma}\,e^{\frac{X_i-\mu}{\sigma}}\exp\{-e^{\frac{X_i-\mu}{\sigma}}\}$$

取自然對數得對數概似（log likelihood）函數為：

$$\log L=-n\log\sigma+\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma}-\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{X_i-\mu}{\sigma}}$$

將 $\log L$ 分別對 μ，σ 微分，得：

$$\frac{\partial\log L}{\partial\mu}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{X_i-\mu}{\sigma}} \quad (2)$$

$$\frac{\partial\log L}{\partial\sigma}=-\frac{n}{\sigma}-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{X_i-\mu}{\sigma}}\cdot(X_i-\mu) \quad (3)$$

故此最大概似估計量 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\sigma}$ 可由解：

$\frac{\partial \log L}{\partial \mu}=0$ 和 $\frac{\partial \log L}{\partial \sigma}=0$ 而獲得，即：

$$e^{\hat{\mu}} = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp \left(\frac{X_i}{\hat{\sigma}} \right) \right]^{\hat{\sigma}} \tag{4}$$

將上式代入(3)式可得：

$$n\hat{\sigma} + \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{X_i}{\hat{\sigma}}} \cdot X_i \cdot \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{X_i}{\hat{\sigma}}}} = 0 \tag{5}$$

上式左邊為 $\hat{\sigma}$ 的函數，故求 $\hat{\sigma}$ 和 $\hat{\mu}$ 必須先解(5)式，求得 $\hat{\sigma}$，而 $\hat{\mu}$ 則由(4)式立即可得。但(5)式無法用解析（analytical）方法求解, 通常必須採用疊代程序或一些標準的重複方法，如牛頓法（Newton's method）求解, 在這些程序中必須給一些起始值, 而且通常無法知道(5)式中的 $\hat{\sigma}$ 到底為無解, 一解，兩解或多解。今將(5)式重新寫為：

$$\hat{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i e^{\frac{X_i}{\hat{\sigma}}}}{\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{X_i}{\hat{\sigma}}}} - \overline{X} \tag{6}$$

令 $g(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma}$ 及

$$h(\hat{\sigma}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i e^{\frac{X_i}{\hat{\sigma}}}}{\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{X_i}{\hat{\sigma}}}} - \overline{X}$$

解(6)式求 $\hat{\sigma}$ 之值，也就是求 $g(\hat{\sigma})$ 與 $h(\hat{\sigma})$ 兩函數於平面圖形上的交點，又因為

$$\lim_{\hat{\sigma}\to 0} g(\hat{\sigma}) = 0 \text{ 且 } \lim_{\hat{\sigma}\to \infty} g(\hat{\sigma}) = \infty \tag{7}$$

且 g 為 $\hat{\sigma}$ 的嚴格增函數（strictly increasing function），同時：

$$\lim_{\hat{\sigma}\to 0} h(\hat{\sigma}) = \lim_{\hat{\sigma}\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i e^{\frac{X_i}{\hat{\sigma}}}}{\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{X_i}{\hat{\sigma}}}} - \overline{X}$$

$$= \lim_{\hat{\sigma}\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i e^{\frac{X_i}{\hat{\sigma}}}}{e^{\frac{X_{(n)}}{\hat{\sigma}}}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{X_i}{\hat{\sigma}}}}{e^{\frac{X_{(n)}}{\hat{\sigma}}}}} - \overline{X}$$

$$= \lim_{\hat{\sigma}\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i e^{\frac{X_i - X_{(n)}}{\hat{\sigma}}}}{\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{X_i - X_{(n)}}{\hat{\sigma}}}} - \overline{X}$$

$$= X_{(n)} - \overline{X} \tag{8}$$

其中 $X_{(n)}$ 為 $X_1, \cdots, X_n$ 中之最大值，又

$$\lim_{\hat{\sigma}\to\infty} h(\hat{\sigma}) = \lim_{\hat{\sigma}\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i e^{\frac{X_i}{\hat{\sigma}}}}{\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{X_i}{\hat{\sigma}}}} - \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \overline{X} = \overline{X} - \overline{X} = 0 \tag{9}$$

同時,

$$h'(\hat{\sigma}) = \frac{-\sum_{i=1}^{n} X_i^2 e^{\frac{X_i}{\hat{\sigma}}} \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{X_i}{\hat{\sigma}}} + \left(\sum_{i=1}^{n} X_i e^{\frac{X_i}{\hat{\sigma}}} \right)^2}{\hat{\sigma}^2 \left(\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{X_i}{\hat{\sigma}}} \right)^2} \tag{10}$$

上式分母恆為正，另取：

$$a_i = X_i e^{\frac{X_i}{2\hat{\sigma}}}, \quad b_i = e^{\frac{X_i}{2\hat{\sigma}}}$$

當 a_i，$b_i > 0$，$i = 1$，$\cdots$，n，利用柯西不等式得：

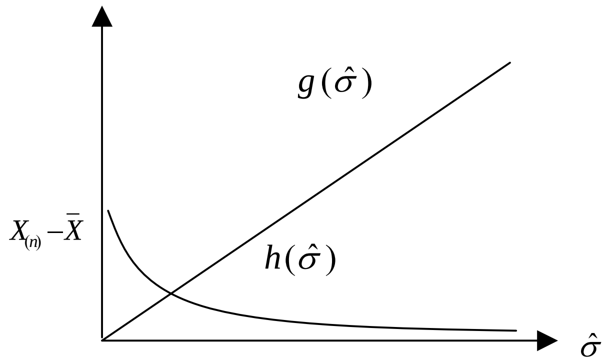


圖 1 h($\hat{\sigma}$)與 g($\hat{\sigma}$)的平面圖

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} X_i^2 e^{\frac{X_i}{\hat{\sigma}}} \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{X_i}{\hat{\sigma}}} &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \\
&\geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} X_i e^{\frac{X_i}{2\hat{\sigma}}} \cdot e^{\frac{X_i}{2\hat{\sigma}}} \right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} X_i e^{\frac{X_i}{\hat{\sigma}}} \right)^2
\end{aligned}
\tag{11}
$$

故(10)式中分母大於 0，且分子小於 0，得 $h'(\hat{\sigma}) < 0$，所以 $h(\hat{\sigma})$ 為 $\hat{\sigma}$ 的減函數，由此可得下面性質：

性質 1：假設隨機變數 X_1，⋯，X_n 具有如(1)的兩參數的極值分配，且對應的次序統計量 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$，則其最大概似估計量 $\hat{\mu}$ 與 $\hat{\sigma}$ 均是唯一的，且同時具有 $\hat{\sigma} \leq X_{(n)} - \bar{X}$。

證明：今依(6)到(11)式，可做出圖 1，由圖可清晰的了解到 $\hat{\sigma}$ 的唯一性，因為求解(6)式中的概似方程式中之 $\hat{\sigma}$，只需解兩個函數 $g(\hat{\sigma})$ 與 $h(\hat{\sigma})$ 在平面圖上的交點即可，而 $g(\hat{\sigma})$ 與 $h(\hat{\sigma})$ 的圖形如圖 1：

圖 1 只有一個交點，所以 $\hat{\sigma}$ 的解應為唯一的。又由(4)式可得：

$$
\hat{\mu} = \log\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{X_i}{\hat{\sigma}} \right) \right]^{\hat{\sigma}}
$$

故亦為唯一的。

註 1：針對柯西不等式中，$a_i \geq 0, b_i \geq 0$，$i = 1, \cdots, n$，為必要的假設條件,來自極值分配的資料 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ 未必一定能滿足以上的條件，由於極值分配的參數為位置參數（location parameter）與尺度參數（scale parameter），故對每一次觀察值只需加上適當的值如 M，使得 $X'_{(i)} = X_{(i)} + M \geq 0,\ i = 1, \cdots, n$，此時所形成的新資料，對於所估計的參數值，只有對位置參數有影響且只差一個 M，減去 M 便可得原資料的 $\hat{\mu}$，對尺度參數 σ 的估計值 $\hat{\sigma}$ 則沒有影響。對於(5)式的概似方程式，用疊代法求估 $\hat{\sigma}$ 時，由性質 1 的結果我們建議採用 $X_{(n)} - \bar{X}$ 為其起始值。

二、 設限資料（Censored Data）

(一) 簡單右設限樣本（Singly right censored samples）

假設隨機變數 $X_1,\cdots,X_n$ 為來自兩參數的極值分配如(1)所示，其中只有小於 T_0 的資料可以被使用，即 $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(r)} \le T_0$，對於如此的型二設限樣本（Type II censored sample），此處 $T_0 = X_{(r)}$，此 $X_{(r)}$ 為 n 個樣本中第 r 個次序統計量，對於型一設限樣本（Type I censored sample），此處可令 $T_0 > X_{(r)}$。今令 $c = n - r$ 為設限資料中未被觀察到的資料，則此樣本的概似函數為：

$$L = \frac{n!}{c!}\left[\prod_{i=1}^{r} f(X_i)\right]\left[S(T_0)\right]^c$$

$$= \frac{n!}{c!}\left[\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{\sigma}\cdot e^{\frac{X_{(i)}-\mu}{\sigma}}\cdot\exp\left(-e^{\frac{X_{(i)}-\mu}{\sigma}}\right)\right]\left[\exp\left(-e^{\frac{T_0-\mu}{\sigma}}\right)\right]^c$$

其對數概似（log likelihood）函數為：

$$\log L = \log\frac{n!}{c!} - r\log\sigma + \sum_{i=1}^{r}\frac{X_{(i)}-\mu}{\sigma} - \sum_{i=1}^{r} e^{\frac{X_{(i)}-\mu}{\sigma}} - ce^{\frac{T_0-\mu}{\sigma}}$$

故最大概似估計方程式如下：

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = -\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{r} e^{\frac{X_{(i)}-\mu}{\sigma}} + \frac{c}{\sigma}e^{\frac{T_0-\mu}{\sigma}} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma} = -\frac{r}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{r}\left(X_{(i)}-\mu\right) + \sum_{i=1}^{r} e^{\frac{X_{(i)}-\mu}{\sigma}}\cdot\frac{X_{(i)}-\mu}{\sigma^2} + \frac{c(T_0-\mu)}{\sigma^2}\cdot e^{\frac{T_0-\mu}{\sigma}} = 0 \tag{13}$$

由(12)我們可得：

$$e^{\hat{\mu}} = \left[\frac{1}{r}\left(\sum_{i=1}^{r} e^{\frac{X_{(i)}}{\hat{\sigma}}} + ce^{\frac{T_0}{\hat{\sigma}}}\right)\right]^{\hat{\sigma}}$$

將上式代入(13)式可得：

$$r\hat{\sigma} + \sum_{i=1}^{r} X_{(i)} - \frac{r\left[\sum_{i=1}^{r} e^{\frac{X_i}{\hat{\sigma}}}\cdot X_i + ce^{\frac{T_0}{\hat{\sigma}}}\cdot T_0\right]}{\sum_{i=1}^{r} e^{\frac{X_i}{\hat{\sigma}}} + ce^{\frac{T_0}{\hat{\sigma}}}} = 0$$

令 $g_1(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma}$ 及

$$h_1(\hat{\sigma}) = \frac{\left[\sum_{i=1}^{r} e^{\frac{X_i}{\hat{\sigma}}} X_{(i)} + ce^{\frac{T_0}{\hat{\sigma}}} T_0\right]}{\sum_{i=1}^{r} e^{\frac{X_{(i)}}{\hat{\sigma}}} + ce^{\frac{T_0}{\hat{\sigma}}}} - \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} X_{(i)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{X_{(i)}}{\hat{\sigma}}} X_{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{X_{(i)}}{\hat{\sigma}}}} - \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} X_{(i)}$$

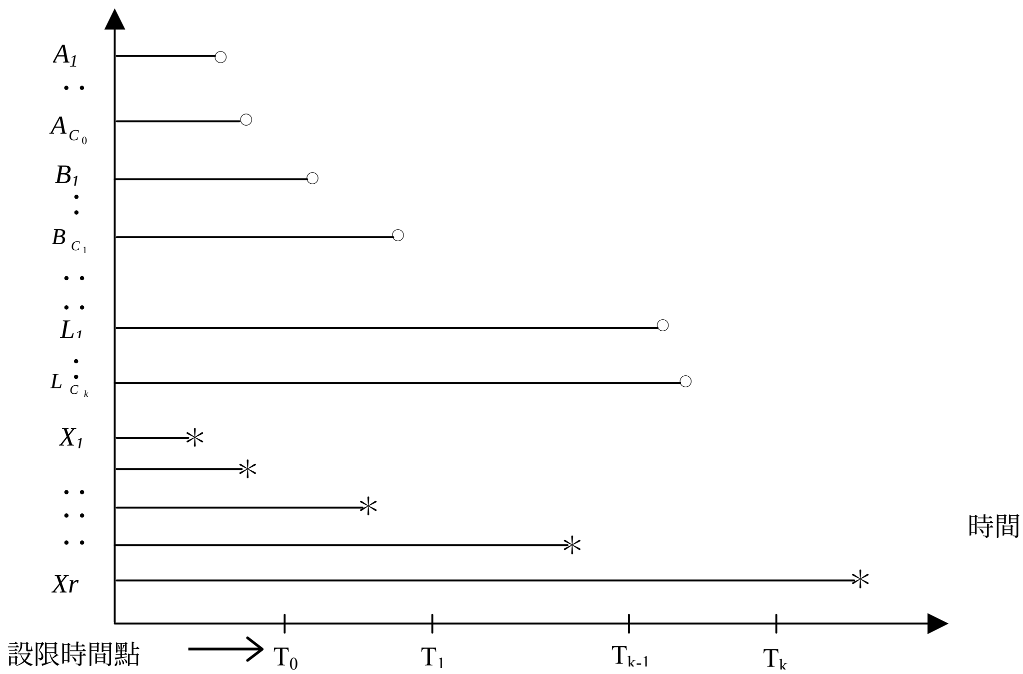
其中當 $i > r$ 時，取 $X_{(i)} = T_0$。

其餘的部分，再依照完全資料處理方法可得以下性質：

性質 2：假設隨機變數 $X_1,\cdots,X_n$ 具有如(1)之兩參數的極值分配且僅有最小的 r 個資料為可以被使用的設限資料，其參數的最大概似估計量 $\hat{\mu}$ 與 $\hat{\sigma}$ 均具有唯一的性質，且 $\hat{\sigma} \le X_{(r)} - \overline{X}_{(r)}$，其中 $\overline{X}_{(r)} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} X_{(i)}$。

(二) 逐步設限樣本（Progressively censored sample）

在實務上，經常會碰到逐步設限樣本，尤其在一些生物統計的臨床實驗，或一些工業上的可靠度試驗與商業上一些實務問題（可參考 Reiss & Thomas, 2001）。若全部有 n 個事物參與實驗（統計上的實驗），



○為被移除的資料，即無法觀察到的資料，共有 $\sum_{i=0}^{k} c_i$ 個

∗為可觀察到的資料，共有 $n-\sum_{i=0}^{k} c_i$ 個

圖 2 逐步設限資料圖

其設限點為 $T_0, T_1, \cdots, T_k$，在每一個設限點有 $c_j\,(j=0,1,\cdots,k)$ 個未被觀察到（或被移除），如圖 2：

令 $r = n - \sum_{i=0}^{k} c_i$，如此的隨機樣本其概似函數為：

$$L = N\left[\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{\sigma}\cdot e^{\frac{X_i-\mu}{\sigma}}\cdot \exp\left(-e^{\frac{X_i-\mu}{\sigma}}\right)\right]$$
$$\cdot\left\{\prod_{j=0}^{k}\left[\exp\left(-e^{\frac{T_j-\mu}{\sigma}}\right)\right]^{c_j}\right\}$$

其中 N 為一個次序常數（ordering constant），在取自然對數後，我們有：

$$\log L = -\frac{r}{\sigma}+\sum_{i=1}^{r}\frac{X_i-\mu}{\sigma}-\sum_{i=1}^{r}\exp\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)$$
$$-\sum_{j=0}^{k}C_j\exp\left(\frac{T_i-\mu}{\sigma}\right)+C$$

其中 C 為常數。其分別對 $\hat{\mu}$ 與 $\hat{\sigma}$ 微分的最大概似估計方程式為：

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = -\frac{r}{\sigma}+\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{r}\exp\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)+\frac{1}{\sigma}\sum_{j=0}^{k}c_j\exp\left(\frac{T_j-\mu}{\sigma}\right)=0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma} = -\frac{r}{\sigma}-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{r}(X_i-\mu)+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{r}(X_i-\mu)\exp\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)$$
$$+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=0}^{k}c_j(T_j-\mu)\exp\left(\frac{T_j-\mu}{\sigma}\right)=0$$

上式 $k = 0$ 時與二、設限資料中的(一)簡單右設限樣本有相同的結果，對於以上兩式，可以依照二、設限資料中的(一)簡單右設限樣本與一、完全資料所建構的方法，立即可得到和性質 1 與性質 2 相同的結果，在此不再贅述。

註 2：以上在完全資料、簡單右設限樣本及逐步設限樣本，我們驗證出 MLE 的唯一性。但其他的設限資料樣本如雙邊設限樣本及多重設限樣本，本文的方法尚未提及。雖然 Balakrishnan 和 Varadan（1991）提供近似的 MLE 明顯的解，僅為近似解，故亦非證明，這方面的證明目前仍然是欠缺的。

參、實例

例一：本例為驗證性質 1 中的基本性質，如 $\hat{\sigma} \le X_{(n)} - \bar{X}$，這些資料來自 Lawless（1982）第 189 頁，原始資料為在實驗室中對兩組電器絕緣體的使用電壓強度做測試，每組包含 20 個樣本，其損壞時的電壓為（in kilovolts per millimeter）：

第一類絕緣體：32.0, 35.4, 36.2, 39.8, 41.2, 43.3, 45.5, 46.0, 46.2, 46.4, 46.5, 46.8, 47.3, 47.3, 47.6, 49.2, 50.4, 50.9, 52.4, 56.3。

第二類絕緣體：39.4, 45.3, 49.2, 49.4, 51.3, 52.0, 53.2, 53.2, 54.9, 55.5, 57.1, 57.2, 57.5, 59.2, 61.0, 62.4, 63.8, 64.3, 67.3, 67.7。

由工程上的經驗，此兩類絕緣體的資料呈兩參數的韋伯分配，今將每一資料取自然對數如下：

第一類絕緣體：3.47, 3.57, 3.59, 3.69, 3.72, 3.77, 3.82, 3.83, 3.83, 3.84, 3.84, 3.85, 3.86, 3.86, 3.86, 3.90, 3.92, 3.93, 3.96, 4.03。

第二類絕緣體：3.67, 3.81, 3.90, 3.90, 3.94, 3.95, 3.97, 3.97, 4.01, 4.02, 4.04, 4.05, 4.05, 4.08, 4.11, 4.13, 4.16, 4.16, 4.21, 4.22。

由於韋伯資料的自然對數為一極值分配，故此資料為如(1)所述的兩參數的極值分配，今視為完全資料，在第一類絕緣體電壓的最大概似估計 $\hat{\mu} = 3.86$，$\hat{\sigma} = 0.11$，故滿足性質 1 中：

$$\hat{\sigma} \le X_{(20)} - \bar{X} = 4.03 - 3.8055 = 0.2245$$

在第二類絕緣體電壓的最大概似估計 $\hat{\mu} = 4.0796$，$\hat{\sigma} = 0.109$，同樣也滿足性質 1，

$$\hat{\sigma} \le X_{(20)} - \bar{X} = 4.22 - 4.02 = 0.20$$

對於這個樣本的估計分配是否符合極值分配，我們需先做適合度檢（goodness-of-fit test），其步驟如下：

假設 $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$ 為次序隨機樣本資料，來自樣本大小為 n 的未知的母體分配 $F(X)$。令 $F_E(T)$ 為完全特定的累積分配函數，我們的目的是要檢定：

$H_0: F(X) = F_E(X)$，對所有的 X，

對立

$H_1: F(X) \ne F_E(X)$

考慮 Cramer-Von Mises 統計量（參考 Kendall & Stuart, 1968; Stephens, 1974）

$$W_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[F_E(x_{(i)}) - \frac{i-0.5}{n}\right]^2 + \frac{1}{12n}$$

以上第一類絕緣體的 $W_n^2 = 0.0982$，第二類絕緣體的 $W_n^2 = 0.2964$ 均小於 $W_c^2 = 0.461$（當顯著水準 $\alpha = 0.05$ 時，W_n^2 的臨界值 $W_c^2 = 0.461$）（參考 Kececioglu, 1993）。所以例一中的兩類絕緣體的資料均符合極值分配。

例二：以下右邊設限樣本來自（Lawless, 1975, p.258）中，$n = 40$ 且 $r = 28$，這些觀察值來自兩參數的極值分配為：

-2.982， -2.849， -2.546， -2.350，
-1.983， -1.492， -1.443， -1.394，
-1.386， -1.269， -1.195， -1.174，
-0.845， -0.620， -0.576， -0.548，
-0.247， -0.195， -0.056， -0.013，
0.006, 0.033, 0.037, 0.046, 0.084,
0.221， 0.245， 0.296。

由資料可得 $X_{(r)} = X_{(28)} = 0.296$，$\overline{X}_{(r)} = \frac{1}{28}\sum_{i=1}^{28} X_{(i)} = -0.8653$，這些觀察值的最大概似估計 $\hat{\mu} = 0.1563$，$\hat{\sigma} = 0.9104$，故滿足性質：

$$\hat{\sigma} \le X_{(28)} - \overline{X}_{(28)} = 0.296 - (-0.8653) = 1.1613,$$

且 Cramer-Von Mises 統計量 $W_n^2 = 0.0465$，故資料亦符合極值分配。

例三：參考 Balakrishnan 和 Cohen（1991）提供了來自極值分配之左邊設限樣本，全部樣本 $n = 20$，只觀察到最大的 10 個資料如下：

-3.57, -2.55, -2.02, -1.66, -1.36,
-1.15, -0.95, -0.77, -0.61, -0.45。

由以上資料其最大值 $X_{(20)} = -0.45$，$\overline{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_{(i)} = -1.509$，又其最大概似估計為 $\hat{\mu} = -0.112$，$\hat{\sigma} = 0.907$，故亦滿足性質：$\hat{\sigma} \le X_{(20)} - \overline{X} = -0.45 - (-1.509) = 1.059$，又 Cramer-Von Mises 統計量 $W_n^2 = 0.0052$，故資料符合極值分配。

註 3：雖然在例三中的設限型態並未證明，然而由本例中亦滿足 $\hat{\sigma} \le X_{(20)} - \overline{X}$ 的性質來看，這組未證明的設限資料亦應有性質 1 與性質 2 相似的結果。

參考論文

1. Azzalini, A. (1996). Statistical inference: Based on the likelihood (pp.53-100). London, Chapman & Hall, Inc.

2. Balakrishnan, N., Cohen, A. C. (1991). Order statistics and inference: Estimation methods. New York: Academic Press, Inc.

3. Balakrishnan, N. & Varadan J. (1991). Approximate MLEs for the location and scale parameters of the extreme value distribution with ceusoring. IEEE Transactions on Reliability, 40, 146-151.

4. Blom, G. (1958). Statistical estimations and transformed beta-variables. New York: Wiley.

5. Dekkers, A. L. M., Einmahl, J. H. J. & de

Han, L. (1989). A moment estimator for the index of an extreme-value distribution. Annals of Mathematical Statistics, 17, 1833-1855.

6. Kececioglu, D. (1993). Reliability and life testing Handbook, 1, PTR Prentice-Hall, Inc.

7. Kendall, M. G. & Stuart, A. (1968). The advanced theory of statistics, 3(2nd ed.). London: Griffin.

8. Kimball, B. F. (1946). Sufficient statistical estimation functions for the parameters of the distribution of maximum values. Annals of Mathematical Statistics, 13, 318-325.

9. Kimball, B. F. (1956). The bias in certain estimates of the extreme-value distribution. Annals of Mathematical Statistics, 27, 758-767.

10. Gumbel, E. J. (1958). Statistics of extremes. New York and London: Columbia University Press.

11. Lawless, J. F. (1975). Construction of tolerance bounds for the extreme value and weibull distributions. Technometrics, 17, 255-261.

12. Lawless, L. F. (1982). Statistical models and methods for lifetime data. New York: John Wiley.

13. Reiss, R. D., & Thomas, M. (2001). Statistical analysis of extreme value with applications to insurance, finance, hydrology and other fields. Berlin: Birkhauser Verlag.

14. Shimokawa, T., & Liao, M. (1999). Goodness-of-fit tests for type i extreme value and 2-parameter weibull distributions. IEEE Transactions on Reliability, 48, 79-84.

15. Stephens, M. A. (1974). EDF statistical for goodness of fit and some comparisons. Journal of American Statistics Association, 69, 730-737.

16. Weiss, L. (1961). On the estimation of scale parameters. Naval Research Logist Quart, 8, 245-256.

2002 年 10 月 02 日收稿

2002 年 10 月 16 日初審

2002 年 12 月 19 日複審

2003 年 01 月 02 日接受