商管科技季刊　第三卷　第一期　民國九十一年
Commerce & Management Quarterly, Vol. 3, No.1, pp. 1~ 17 (2002)

估計 Gompertz 分配中母數的聯合信賴區域

ESTIMATE AN EXACT CONFIDENCE REGION FOR THE PARAMETERS OF GOMPERTZ POPULATION

林春財
嘉南藥理科技大學藥學系
許瑞珍
嘉南藥理科技大學生活應用與保健系
陸海林
嘉南藥理科技大學化妝品系

Chun-Tsai Lin
Department of Pharmacy
Chia-Nan University of Pharmacy and Science

Jui-Chen Hsu
Department of Applied Life Science and Health
Chia-Nan University of Pharmacy and Science

Hai-Lin Lu
Department of Cosmetic
Chia-Nan University of Pharmacy and Science

摘　要

Gompertz 分配在保險及生物統計方面運用甚為廣泛,(Chen, 1997)曾對 Gompertz 分配母數中估計出一個完整的型二設限資料之精確地信賴區間及精確地聯合信賴區域討論。對於雙邊及多邊型二設限資料情況下估計單一母數之精確地信賴區間或估計一對母數之精確地信賴區域,我們進一步藉由一個簡單的轉換,可把 Gompertz 分配轉換成指數分配,並成功地架構出雙邊及多邊型二設限資料之 Gompertz 母數的信賴區間或區域,同時在最後以模擬結果評估其可行性。

關鍵詞:多邊型二設限資料、Gompertz、精確地信賴區域

ABSTRACT

The Gompertz distribution is widely used in actuarial work and by biologists. For complete and type II censored data, an exact confidence interval and an exact joint confidence region for the parameters of the Gompertz distribution were discussed by Chen (1997). For double and multiple type II censored data, the exact confidence interval and confidence region are successfully constructed by using the simple transformation from Gompertz distribution to exponential distribution. We also provide the simulation results to criticize the method's performance at the end.

Key words: Multiple type II censored data, Gompertz, an exact confidence region

壹、前言

Gompertz 分配常用來解釋死亡率曲線，它首先由(Gompertz，1825)提出，次經(Makeham，1860)加以修正，(Chiang，1968)對它的危險函數（hazard function）加上一個常數予以一般化，後(Grad，Rao and Redmond，1970)研究 Gompertz 分配的性質，(Gordon，1990)求得母數的最大概似估計值。Gompertz 分配其危險率（hazard rate）時常用在成年人的死亡率模式中（for modeling human mortality at adult ages）(參考 (Anderson P.K，Borgan O.，Gill R.D. and Keiding N.，1991))，此死亡率為 Gompertz 分配母數的函數，故對此母數之估計或區間估計是甚為有用的。(Chen，1997）對 Gompertz 分配母數 c 提供一個精確地信賴區間，而對於母數 (c,λ) 則提供一個精確地聯合信賴區域，Chen 的近似方法適用於完整與右邊型二設限資料。

在本文中，我們將 Chen 的方法擴充到更複雜的雙邊或多邊的型二設限資料(參考(Balakrishnan, and Basu，1995))。考慮一個具有 n 個病人的存活實驗(life-testing)，對於雙邊的型二設限，首先假設 $X_1,\cdots,X_n$ 為一個完整的隨機樣本時，而其前 r 個樣本為設限資料，而整個實驗在第($n-s$)個樣本時能被觀察到失敗，此時整個實驗即結束，因此僅有($n-r-s$)個順序統計量（order statistic） $X_{(r+1)},X_{(r+2)},\cdots,X_{(n-s)}$ 可以被利用。而對於多邊的型二設限情形，設其前 r 個樣本中間的 l 個樣本和最後的 s 個樣本為設限資料，因此僅有 $X_{(r+1)}<\cdots<X_{(r+k)}$ 和 $X_{(r+k+l+1)}<\cdots<X_{(n-s)}$ 可以被利用。在如此設限資料下，對於 Gompertz 分配中母數 c ,我們成功的獲得一個精確地信賴區間，而對於母數 (c,λ) 則獲得一個精確地聯合信賴區域。

貳、理論與結果

兩母數的 Gompertz 分配表為 $G(c,\lambda)$, 其機率密度函數具有下列形式：

$$f(x)=\lambda\exp\{cx-\frac{\lambda}{c}(e^{cx}-1)\} \quad x>0 \tag{1}$$

其中 $\lambda>0$ 和 $c>0$ 為其母數。其存活分配函數為：

$$S(x)=\exp\{-\frac{\lambda}{c}(e^{cx}-1)\} \tag{2}$$

Gompertz 分配可由指數分配轉換而獲得，其方式如下：

$$X=\frac{1}{c}\ln(\frac{c}{\lambda}Y+1) \text{ 或 } Y=\frac{\lambda}{c}(e^{cX}-1)$$

其中 Y 代入方程式(1)，則變成標準指數分配。

考慮前面所討論雙邊型二設限情形，設 $X_i\sim G(c,\lambda), i=1,\cdots,n$，為一完整隨機樣本。假設僅有順序統計量 $X_{(r+1)},\cdots,X_{(r+k)}$ 可利用

$$\text{設 } Y_i=\frac{\lambda}{c}(e^{cX_i}-1) \quad i=1,\cdots,n \tag{3}$$

則 Y_i 為標準指數分配, $Y_{(r+1)},\cdots,Y_{(r+k)}$ 表相對應的順序統計量。而且函數

$$y(x)=\frac{\lambda}{c}(e^{cx}-1)$$

為 x 的嚴格遞增函數，又定義兩隨機變數如下：

$$U_1=2[\sum_{i=r+3}^{r+k-1}Y_{(i)}+(n-r-k+1)Y_{(r+k)}+(2+r-n)Y_{(r+2)}]$$

和

$$V_1=2(n-r-1)(Y_{(r+2)}-Y_{(r+1)})$$

則此 U_1 和 V_1 為獨立隨機變數（證明請參考附錄 A)，且分別為具有 2(k-2) 和 2 自由度的 χ^2 分配，同樣的定義

$$\xi_1=\frac{U_1}{(k-2)V_1} \text{ 和 } \zeta_1=U_1+V_1 \tag{4}$$

其中 ξ_1 為 F 分配其自由度為 2(k-2) 和 2，ζ_1 為 χ^2 分配其自由度為 2(k-1)，二者皆為獨立隨機變數（證明請參考 chen（1997）的引理 1)。

引理：對任意的 $0<a_{r+1}<\cdots<a_{r+k}$，函數

$$\xi_1(c)=\frac{\sum_{i=r+3}^{r+k-1}(e^{ca_i}-1)+(n-r-k+1)(e^{ca_{r+k}}-1)+(2+r-n)(e^{ca_{r+2}}-1)}{(n-r-1)(k-2)(e^{ca_{r+2}}-e^{ca_{r+1}})}$$

為 c 的嚴格遞增函數。其中當 $c>0$，$t>0$ 且

$$t\neq\frac{\sum_{i=r+3}^{r+k-1}a_i+(n-r-k+1)a_{r+k}+(2+r-n)a_{r+2}}{(n-r-1)(k-2)(a_{r+2}-a_{r+1})}$$

時，$\xi_1(c)=t$ 有唯一解

證明：

$$\xi_1(c)=\frac{\sum_{i=r+3}^{r+k-1}(e^{ca_i}-1)+(n-r-k+1)(e^{ca_{r+k}}-1)+(2+r-n)(e^{ca_{r+2}}-1)}{(n-r-1)(k-2)(e^{ca_{r+2}}-e^{ca_{r+1}})}$$

$$=\frac{\sum_{i=r+3}^{r+k-1}e^{ca_i}+(n-r-k+1)e^{ca_{r+k}}+(2+r-n)e^{ca_{r+2}}}{(n-r-1)(k-2)(e^{ca_{r+2}}-e^{ca_{r+1}})}$$

$$=\frac{\sum_{i=r+3}^{r+k-1}e^{c(a_i-a_{r+1})}+(n-r-k+1)e^{c(a_{r+k}-a_{r+1})}+(2+r-n)e^{c(a_{r+2}-a_{r+1})}}{(n-r-1)(k-2)(e^{c(a_{r+2}-a_{r+1})}-1)}$$

$$=\frac{\sum_{i=r+3}^{r+k-1}(e^{c(a_i-a_{r+1})}-1)+(n-r-k+1)(e^{c(a_{r+k}-a_{r+1})}-1)+(2+r-n)(e^{c(a_{r+2}-a_{r+1})}-1)}{(n-r-1)(k-2)(e^{c(a_{r+2}-a_{r+1})}-1)}$$

假設 $0<a_{r+2}-a_{r+1}<\cdots<a_{r+k}-a_{r+1}$，其證明可由 Chen(1997)所發表論文之引理 3，4 獲得。而在方程式(4)中的 ξ_1 和 ζ_1 也表示為

$$\xi_1=\frac{\sum_{i=r+3}^{r+k-1}(e^{cX_{(i)}}-1)+(n-r-k+1)(e^{cX_{(r+k)}}-1)+(2+r-n)(e^{cX_{(r+2)}}-1)}{(n-r-1)(k-2)(e^{cX_{(r+2)}}-e^{cX_{(r+1)}})}$$

$$=\frac{\sum_{i=r+3}^{r+k-1}e^{cX_{(i)}}+(n-r-k+1)e^{cX_{(r+k)}}+(2+r-n)e^{cX_{(r+2)}}}{(n-r-1)(k-2)(e^{cX_{(r+2)}}-e^{cX_{(r+1)}})}$$

和

$$\zeta_1=\frac{2\lambda}{c}[\sum_{i=r+2}^{r+k-1}(e^{cX_{(i)}}-1)+(n-r-k+1)(e^{cX_{(r+k)}}-1)+(1+r-n)(e^{cX_{(r+1)}}-1)]$$

$$=\frac{2\lambda}{c}[\sum_{i=r+2}^{r+k-1}e^{cX_{(i)}}+(n-r-k+1)e^{cX_{(r+k)}}+(1+r-n)e^{cX_{(r+1)}}]$$

在下一定理中對於 Gompertz 分配中母數 c，我們建立一個精確地信賴區間，而對於 (c,λ) 則建立一個精確地聯合信賴區域。

定理 1：對於存活時間設為雙邊型二設限資料時，假設 $X_{obs}=(X_{(r+1)},X_{(r+2)},\cdots,X_{(r+k)})$ 為 Gompertz 分配 $G(c,\lambda)$，其樣本大小為 n，其中 k 個次序統計量是可被觀察到的，對 $0<\alpha<1$ 分別可得：

1. 於母數 c 而言，其 $(1-\alpha)\times 100\%$ 的信賴區間為：

$$\{c\mid\phi(X_{obs},F_{1-\alpha/2}(2(k-2),2))<c<\phi(X_{obs},F_{\alpha/2}(2(k-2),2))\}$$

2. 於母數 (c,λ) 而言，其 $(1-\alpha)\times 100\%$ 的信賴區域為：

$$\{(c,\lambda)\mid\phi(X_{obs},F_{(1+\sqrt{1-\alpha})/2}(2(k-2),2))<c<\phi(X_{obs},F_{(1-\sqrt{1-\alpha})/2}(2(k-2),2)),$$

$$\frac{c\chi^2_{(1+\sqrt{1-\alpha})/2}(2(k-1))}{S_1}<\lambda<\frac{c\chi^2_{(1-\sqrt{1-\alpha})/2}(2(k-1))}{S_1}\}$$

其中

$$S_1=2[\sum_{i=r+2}^{r+k-1}e^{cX_{(i)}}+(n-r-k+1)e^{cX_{(r+k)}}+(1+r-n)e^{cX_{(r+1)}}]$$

，且 $\phi(X_{obs},t)$ 為下列方程式中 c 的解

$$t=\frac{\sum_{i=r+3}^{r+k-1}e^{cX_{(i)}}+(n-r-k+1)e^{cX_{(r+k)}}+(2+r-n)e^{cX_{(r+2)}}}{(n-r-1)(k-2)(e^{cX_{(r+2)}}-e^{cX_{(r+1)}})}$$

。

證明：請參照附錄 B 之證明

其次對於多邊型二設限情形，假設前面的 r 個最後的 s 個及中間的 l 個被設限，而有 $X_{(r+1)}<\cdots<X_{(r+k)}$ 和 $X_{(r+k+l+1)}<\cdots<X_{(r+k+l+m)}$ 共有 $k+m$ 個資料可被觀察到的，其中 $m=n-r-k-l-s$。設

$$U_2 = 2[\sum_{i=r+3}^{r+k-1} Y_{(i)} + (n-r-k+1)Y_{(r+k)} + (2+r-n)Y_{(r+2)}]$$

$$V_2 = 2(n-r-1)(Y_{(r+2)} - Y_{(r+1)})$$

$$U_3 = 2[\sum_{i=r+k+l+3}^{r+k+l+m-1} Y_{(i)} + (n-r-k-l-m+1)Y_{(n-s)} + (2+r+k+l-n)Y_{(r+k+l+2)}]$$

$$V_3 = 2(n-r-k-l-1)(Y_{(r+k+l+2)} - Y_{(r+k+l+1)}) \qquad (5)$$

令 $\xi_2 = \dfrac{U_2}{(k-2)V_2}$ $\qquad \zeta_2 = U_2 + V_2$

和 $\xi_3 = \dfrac{U_3}{(m-2)V_3}$ $\qquad \zeta_3 = U_3 + V_3$

再次定義 $\xi(c) = \dfrac{1}{2}\xi_2 + \dfrac{1}{2}\xi_3$

$$\zeta(c) = \zeta_2 + \zeta_3 \qquad (6)$$

函數 $\xi(c)$ 滿足引理的性質， 因此可獲得相似於雙邊型二設限的結果。如同定理(1)，今將結果敘述如下：

定理 2：對於存活時間假設為多邊型二設限資料時，假設 $X_{obs} = (X_{(r+1)}, X_{(r+2)}, \cdots, X_{(r+k)}, X_{(r+k+l+1)}, \cdots, X_{(n-s)},)$ 為 Gompertz 分配 $G(c,\lambda)$ 在樣本大小為 n 中只有 $k+m$ 個順序統計量可被利用，此處 $m = n-k-l-s$，對 $0<\alpha<1$時，

1. 於母數 c 而言，其$(1-\alpha)$☓100%的信賴區間為：

$$\{c \mid \phi(X_{obs}, L_1) < c < \phi(X_{obs}, U_1)\}$$

2. 於母數 (c,λ) 而言，其$(1-\alpha)$☓100%的信賴區域為：

$$\{(c,\lambda) \mid \phi(X_{obs}, L_2) < c < \phi(X_{obs}, U_2),$$
$$\frac{c\chi^2_{(1+\sqrt{1-\alpha})/2}(2(k+m-2))}{S_2} < \lambda < \frac{c\chi^2_{(1-\sqrt{1-\alpha})/2}(2(k+m-2))}{S_2}\}$$

其中

$$S_2 = 2[\sum_{i=r+2}^{r+k-1} e^{cX_{(i)}} + (n-r-k+1)e^{cX_{(r+k)}} + (1+r-n)e^{cX_{(r+1)}} + \sum_{i=r+k+l+2}^{r+k+l+m-1} e^{cX_{(i)}} + (s+1)e^{cX_{(n-s)}} + (1+r+k+l-n)e^{cX_{(r+k+l+1)}}]$$

和 $\phi(X_{obs}, t)$ 為下列方程式中 c 的解：

$$\frac{1}{2}\xi_2(c) + \frac{1}{2}\xi_3(c) = t$$

L_1 滿足 $\int_0^{L_1} dF_2 = 1-\alpha/2$，

U_1 滿足 $\int_{U_1}^{\infty} dF_2 = \alpha/2$

L_2 滿足 $\int_0^{L_2} dF_2 = (1-\sqrt{1-\alpha})/2$，

U_2 滿足 $\int_{U_2}^{\infty} dF_2 = (1+\sqrt{1-\alpha})/2$

此 F_2 為 ξ 分配。

證明：請參照定理 1 之證明

最後，對於一多邊型二設限情形，假設後面 s 個及中間 l 個被設限，而 $X_{(1)} < \cdots < X_{(k)}$ 和 $X_{(k+l+1)} < \cdots < X_{(k+l+m)}$

為所觀察到的，其中 $m=n-k-l-s$。設：

$$U_2'=2[\sum_{i=r+2}^{r+k-1}Y_{(i)}+(n-r-k+1)Y_{(r+k)}+(1+r-n)Y_{(r+1)}]$$

$$V_2'=2nY_{(1)}$$

因 $r=0$，如同式(5)，假設 $U_3'=U_3$，

$V_3'=V_3$ 採用式(6)相同方式再次定義：

$$\xi'=\frac{U_2'}{2(k-1)V_2'}+\frac{U_3'}{2(m-2)V_3'}$$

$$\zeta'=U_2'+V_2'+U_3'+V_3'$$

如此的函數 ξ' 亦滿足引理的性質，因此可得到與定理(2)相似的結果。

定理 3：對於存活時間為多邊型二設限資料，假設

$$X_{obs}=(X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(k)},X_{(k+l+1)},\cdots,X_{(n-s)})$$

為 Gompertz 分配 $G(c,\lambda)$ 在樣本大小為 n 中只有 $k+m$ 個順序統計量可被利用，此處 $m=n-k-l-s$，對 $0<\alpha<1$時，

1. 於母數 c 而言，其$(1-\alpha)$×100%的信賴區間為：

$$\{c\,|\,\phi(X_{obs},L_1')<c<\phi(X_{obs},U_1')\}$$

2. 於 (c,λ) 而言，其$(1-\alpha)$×100%的信賴區域為：

$$\{(c,\lambda)\,|\,\phi(X_{obs},L_2')<c<\phi(X_{obs},U_2'),$$

$$\frac{c\chi^2_{(1+\sqrt{1-\alpha})/2}(2(k+m-2))}{S_3}<\lambda<\frac{c\chi^2_{(1-\sqrt{1-\alpha})/2}(2(k+m-2))}{S_3}\}$$

其中

$$S_3=2[\sum_{i=2}^{k-1}e^{cX_{(i)}}+(n-k+1)e^{cX_{(k)}}+(1-n)e^{cX_{(1)}}$$

$$+\sum_{i=k+l+2}^{k+l+m-1}e^{cX_{(i)}}+(s+1)e^{cX_{(n-s)}}+(1+k+l-n)e^{cX_{(k+l+1)}}]$$

和 $\phi(X_{OBS},t)$ 為下列方程式中 c 的解：

$$\frac{1}{2}\xi_2'(c)+\frac{1}{2}\xi_3'(c)=t$$

L_1' 滿足 $\int_0^{L_1'}dF_3=1-\alpha/2$，

U_1' 滿足 $\int_{U_1'}^{\infty}dF_3=\alpha/2$

L_2' 滿足 $\int_0^{L_2'}dF_3=(1-\sqrt{1-\alpha})/2$，

U_2' 滿足 $\int_{U_2'}^{\infty}dF_3=(1+\sqrt{1-\alpha})/2$

此 F_3 為 ξ' 分配。

證明：請參照定理 1 之證明。

參、模擬與結果

在本節我們依據前面所建議的方法，以模擬方法對所提估計母數的方法研究其可行性。為此我們利用蒙地卡羅(Monte Carlo)方法分別對 20，60 等不同樣本，各隨機產生 2000 組資料，在不同的真值 c (=0.02，0.04，0.06)和 λ (=0.01，0.02，0.04)下，對每一模擬資料組求母

數的 $(1-\alpha)\times 100\,\%$ 信賴區間(區域)的長度(面積), 並計算真值 c (或 (c,λ))落在每一信賴區間(區域)的相對頻率, 如此母數之取法並不失一般性，其它值的配對亦有相同結果, 因篇幅關係僅列這些結果。

當 $\alpha = 0.05$ 表 1 至表 20 記錄真值 c (或 (c,λ))落在每一模擬信賴區間(區域)之平均區間長度(面積)，和其估計之機率。表 1-12 和表 13-20 分別代表不同的雙邊型二設限和不同的多邊型二設限情形, 其結果也表示出 2000 個信賴區間(區域)覆蓋真值的機率為 93.5%至 96%及在雙(多)邊型二設限、於相同的母數和樣本下， 增加觀測者的樣本其平均長度較短, 除外我們將 Chen 方法所得到結果置於表 1-12 中，右邊型二設限資料結構下的表下方。發現 Chen 所得結果於區間長度稍微短與區域面積稍微小於我們所提方法, 但是 Chen 之方法僅可使用在完整與右邊型二資料中，對於如此信賴區間(區域)的評估應做更多的模擬其樣本組數亦應再加大為宜，並且將來在理論上可利用訊息矩陣(Information Matrix)做進一步的研究，由於牽涉太理論性，在此不做討論。

肆、討論

在不同的設限情形下去估計 Gompertz 分配的母數一般來說是較困難的，由於 Gompertz 分配可由指數分配變換而來，因而它們之間是可以互相轉換。在本文中對雙邊和多邊的型二設限資料而言，對母體母數的一個精確地信賴區間可利用指數分配順序統計量的特性產生。又對於雙邊型二設限資料在 r=0 時會退化為右邊的型二設限資料, 則 $X_{(1)}$ 是可利用的。且由模擬資料中，顯示在相同的母數下，所觀察到的資料個數愈多，其所估計的母數之信賴區間長度愈短，且信賴區域面積愈小，符合一般所期望的結果。

Chen 的方法必須採用 $X_{(1)}$ 去架構統計量，如定理 1 之 1.所述;於此其信賴區間之長度或信賴區域的面積，將會比本文所建議之方法稍微短或稍微小。但 Chen 的方法只適用於完整的與右邊型二設限的資料，對於雙邊型二設限或多邊型二設限資料, 我們修改 Chen 的方法建立一個精確地信賴區間或區域，在如此資料結構下採用本文所提供之方法應較適宜。

表 1 模擬結果，　Gompertz 分配，　$G(c,\lambda)$ 其中 $c=0.04, \lambda=0.01$

Double censoring r	k	s	c's Average Cov. Prob.	c's Average Inter. Len.	(c,λ) Average Cov. Prob.	(c,λ) Average Inter. Area
0	5	15	94.8	0.5258	93.9	0.00465
3	5	12	94.7	0.5796	95.3	0.00322
6	5	9	93.8	0.6014	95.9	0.00305
9	5	6	94.8	0.6307	95.4	0.00339
12	5	3	94.8	0.5623	95.5	0.00374
15	5	0	95.3	0.4173	95.4	0.00458
Chen						
0	5	15	93.7	0.3909	94.1	0.00364

表 2 模擬結果，　Gompertz 分配，　$G(c,\lambda)$ 其中 $c=0.04, \lambda=0.01$

Double censoring r	k	s	c's Average Cov. Prob.	c's Average Inter. Len.	(c,λ) Average Cov. Prob.	(c,λ) Average Inter. Area
0	10	10	94.7	0.2354	94.1	0.00176
2	10	8	94.7	0.2464	94.5	0.00171
4	10	6	95.6	0.2589	94.7	0.00177
6	10	4	93.9	0.2612	93.9	0.00182
8	10	2	95.5	0.2482	95.8	0.00199
10	10	0	94.4	0.2153	93.9	0.00216
Chen						
0	10	10	94.6	0.2024	94.6	0.00166

表 3 模擬結果，　Gompertz 分配，　$G(c,\lambda)$ 其中 $c=0.04, \lambda=0.01$

Double censoring r	k	s	c's Average Cov. Prob.	c's Average Inter. Len.	(c,λ) Average Cov. Prob.	(c,λ) Average Inter. Area
0	15	5	94.7	0.1605	94.5	0.00125
1	15	4	94.0	0.1628	94.9	0.00127
3	15	2	94.8	0.1649	95.3	0.00135
5	15	0	96.0	0.1540	94.9	0.00146
0	20	0	95.8	0.1195	94.1	0.00103
Chen						
0	15	5	95.0	0.1463	94.1	0.00117
0	20	0	93.7	0.1145	94.4	0.00097

表 4 模擬結果， Gompertz 分配， $G(c,\lambda)$ 其中 $c=0.06,\lambda=0.01$

Double censoring			c's Average	c's Average	(c,λ) Average	(c,λ) Average
r	k	s	Cov. Prob.	Inter. Len.	Cov. Prob.	Inter. Area
0	5	15	95.1	0.5848	94.4	0.00562
3	5	12	94.5	0.6765	94.3	0.00464
6	5	9	94.3	0.7203	94.7	0.00482
9	5	6	94.9	0.7585	93.6	0.00612
12	5	3	94.3	0.7026	94.2	0.00666
15	5	0	94.7	0.5483	93.7	0.00871
Chen						
0	5	15	93.7	0.4602	94.1	0.00502

表 5 模擬結果， Gompertz 分配， $G(c,\lambda)$ 其中 $c=0.06,\lambda=0.01$

Double censoring			c's Average	c's Average	(c,λ) Average	(c,λ) Average
r	k	s	Cov. Prob.	Inter. Len.	Cov. Prob.	Inter. Area
0	10	10	94.3	0.2954	94.0	0.00251
2	10	8	94.2	0.3304	94.4	0.00260
4	10	6	94.9	0.3643	94.6	0.00283
6	10	4	94.4	0.3729	94.4	0.00309
8	10	2	95.4	0.3606	95.5	0.00353
10	10	0	94.8	0.3064	93.6	0.00396
Chen						
0	10	10	94.6	0.2542	94.6	0.00232

表 6 模擬結果， Gompertz 分配， $G(c,\lambda)$ 其中 $c=0.06,\lambda=0.01$

Double censoring			c's Average	c's Average	(c,λ) Average	(c,λ) Average
r	k	s	Cov. Prob.	Inter. Len.	Cov. Prob.	Inter. Area
0	15	5	94.7	0.2121	94.5	0.00191
1	15	4	95.0	0.2179	94.9	0.00199
3	15	2	94.8	0.2299	95.3	0.00221
5	15	0	96.0	0.2197	94.9	0.00249
0	20	0	95.8	0.1628	94.1	0.00163
Chen						
0	15	5	95.0	0.1907	94.1	0.00174
0	20	0	94.6	0.1498	95.0	0.00151

表 7 模擬結果，　Gompertz 分配，　$G(c,\lambda)$ 其中 $c=0.02, \lambda=0.02$

Double censoring			c's Average	c's Average	(c,λ) Average	(c,λ) Average
r	k	s	Cov. Prob.	Inter. Len.	Cov. Prob.	Inter. Area
0	10	10	94.6	0.2687	95.1	0.00321
10	10	0	94.6	0.1566	95.0	0.00176
Chen						
0	10	10	94.6	0.2374	94.6	0.00306

表 8 模擬結果，　Gompertz 分配，　$G(c,\lambda)$ 其中 $c=0.04, \lambda=0.04$

Double censoring			c's Average	c's Average	(c,λ) Average	(c,λ) Average
r	k	s	Cov. Prob.	Inter. Len.	Cov. Prob.	Inter. Area
0	10	10	94.7	0.5101	95.1	0.01405
10	10	0	94.6	0.3136	94.6	0.00704
Chen						
0	10	10	94.7	0.4692	95.0	0.01223

表 9 模擬結果，　Gompertz 分配，　$G(c,\lambda)$ 其中 $c=0.06, \lambda=0.06$

Double censoring			c's Average	c's Average	(c,λ) Average	(c,λ) Average
r	k	s	Cov. Prob.	Inter. Len.	Cov. Prob.	Inter. Area
0	10	10	94.6	0.7011	95.1	0.02940
10	10	0	94.7	0.4665	95.0	0.01585
Chen						
0	10	10	94.6	0.6681	94.6	0.02735

表 10 模擬結果，　Gompertz 分配，　$G(c,\lambda)$ 其中 $c=0.06, \lambda=0.01$

Double censoring			c's Average	c's Average	(c,λ) Average	(c,λ) Average
r	k	s	Cov. Prob.	Inter. Len.	Cov. Prob.	Inter. Area
0	15	45	94.5	0.3655	93.8	0.00218
5	15	40	94.3	0.4686	95.3	0.00199
15	15	30	94.1	0.5660	93.3	0.00208
30	15	15	94.9	0.6041	94.5	0.00261
45	15	0	95.1	0.3798	95.2	0.00385
Chen						
0	15	45	96.2	0.3611	95.5	0.00216

表 11 模擬結果， Gompertz 分配， $G(c,\lambda)$ 其中 $c=0.06, \lambda=0.01$

Double censoring r	k	s	c's Average Cov. Prob.	c's Average Inter. Len.	(c,λ) Average Cov. Prob.	(c,λ) Average Inter. Area
0	30	30	94.4	0.2336	94.5	0.00123
15	30	15	94.1	0.3006	94.3	0.00147
20	30	10	95.2	0.3115	94.6	0.00163
30	30	0	95.0	0.2557	94.6	0.00201
Chen						
0	30	30	94.2	0.2228	94.1	0.00117

表 12 模擬結果， Gompertz 分配， $G(c,\lambda)$ 其中 $c=0.06, \lambda=0.01$

Double censoring r	k	s	c's Average Cov. Prob.	c's Average Inter. Len.	(c,λ) Average Cov. Prob.	(c,λ) Average Inter. Area
0	45	15	94.6	0.1811	94.2	0.00100
5	45	10	94.4	0.1991	95.3	0.00108
10	45	5	94.8	0.2040	95.4	0.00121
15	45	0	94.0	0.1941	94.6	0.00131
0	60	0	95.4	0.1450	94.5	0.00085
Chen						
0	45	15	95.9	0.1754	94.5	0.00094
0	60	0	96.1	0.1426	95.9	0.00082

表 13 模擬結果， Gompertz 分配， $G(c,\lambda)$ 其中 $c=0.04, \lambda=0.01$

Multiple censoring r	k	l	m	s	c's Average Cov. Prob.	c's Average Inter. Len.	(c,λ) Average Cov. Prob.	(c,λ) Average Inter. Area
0	5	4	5	6	94.8	0.3781	92.7	0.00174
1	5	5	5	4	94.4	0.3663	95.3	0.00178
2	5	6	5	2	94.7	0.3600	94.6	0.00185
4	5	3	5	3	94.0	0.3910	94.2	0.00191
5	5	2	5	3	94.6	0.3877	94.4	0.00197
5	5	4	5	1	94.3	0.3442	93.9	0.00203
5	5	5	5	0	95.0	0.3076	95.4	0.00204
0	5	5	5	5	94.7	0.3645	94.4	0.00175

表 14 模擬結果， Gompertz 分配， $G(c,\lambda)$ 其中 $c=0.04, \lambda=0.01$

Multiple censoring					c's Average	c's Average	(c,λ) Average	(c,λ) Average
r	k	l	m	s	Cov. Prob.	Inter. Len.	Cov. Prob.	Inter. Area
0	10	2	5	3	92.3	0.2165	93.3	0.00133
0	10	1	5	4	94.3	0.2121	94.0	0.00137
1	10	2	5	2	95.3	0.2208	94.1	0.00138
2	10	1	5	2	95.6	0.2292	95.7	0.00141
3	10	1	5	1	93.8	0.2267	93.5	0.00145
4	10	1	5	0	94.4	0.2103	94.5	0.00150

表 15 模擬結果， Gompertz 分配， $G(c,\lambda)$ 其中 $c=0.04, \lambda=0.01$

Multiple censoring					c's Average	c's Average	(c,λ) Average	(c,λ) Average
r	k	l	m	s	Cov. Prob.	Inter. Len.	Cov. Prob.	Inter. Area
0	3	6	5	6	94.6	0.5548	95.3	0.00227
0	3	4	5	8	94.1	0.5316	92.6	0.00225
2	3	5	5	5	94.1	0.5487	94.9	0.00237
4	3	4	5	4	93.8	0.5246	94.4	0.00247
4	3	2	5	6	94.4	0.5638	95.8	0.00235
6	3	4	5	2	94.8	0.4963	94.2	0.00266
8	3	2	5	2	95.8	0.5029	95.9	0.00277
8	3	4	5	0	94.8	0.3774	95.7	0.00288

表 16 模擬結果， Gompertz 分配， $G(c,\lambda)$ 其中 $c=0.06, \lambda=0.01$

Multiple censoring					c's Average	c's Average	(c,λ) Average	(c,λ) Average
r	k	l	m	s	Cov. Prob.	Inter. Len.	Cov. Prob.	Inter. Area
0	5	4	5	6	94.8	0.4746	93.0	0.00265
1	5	5	5	4	94.4	0.4720	95.3	0.00281
2	5	6	5	2	94.7	0.4745	94.6	0.00301
4	5	3	5	3	94.0	0.5154	94.2	0.00318
5	5	2	5	3	94.6	0.5148	94.4	0.00331
5	5	4	5	1	94.3	0.4668	93.9	0.00346
5	5	5	5	0	95.0	0.4275	95.4	0.00350
0	5	5	5	5	94.7	0.4616	94.4	0.00269

表 17 模擬結果, Gompertz 分配, $G(c,\lambda)$ 其中 $c=0.06,\lambda=0.01$

Multiple censoring					c's Average	c's Average	(c,λ) Average	(c,λ) Average
r	k	l	m	s	Cov. Prob.	Inter. Len.	Cov. Prob.	Inter. Area
0	10	2	5	3	95.1	0.2782	95.0	0.00212
0	10	1	5	4	94.7	0.2748	93.4	0.00213
1	10	2	5	2	94.3	0.2919	92.6	0.00219
2	10	1	5	2	97.1	0.3036	96.1	0.00227
3	10	1	5	1	94.5	0.3045	94.6	0.00242
4	10	1	5	0	93.6	0.2859	95.0	0.00256

表 18 模擬結果, Gompertz 分配, $G(c,\lambda)$ 其中 $c=0.06,\lambda=0.01$

Multiple censoring					c's Average	c's Average	(c,λ) Average	(c,λ) Average
r	k	l	m	s	Cov. Prob.	Inter. Len.	Cov. Prob.	Inter. Area
0	3	6	5	6	93.8	0.6047	94.6	0.00338
0	3	4	5	8	93.9	0.6064	94.0	0.00335
2	3	5	5	5	95.9	0.6423	94.2	0.00378
4	3	4	5	4	94.0	0.6437	95.3	0.00400
4	3	2	5	6	94.4	0.6493	95.3	0.00386
6	3	4	5	2	94.3	0.6066	94.2	0.00454
8	3	2	5	2	94.4	0.4892	95.2	0.00473
8	3	4	5	0	94.8	0.3774	95.7	0.00530

表 19 模擬結果, Gompertz 分配, $G(c,\lambda)$ 其中 $c=0.06,\lambda=0.01$

Multiple censoring					c's Average	c's Average	(c,λ) Average	(c,λ) Average
r	k	l	m	s	Cov. Prob.	Inter. Len.	Cov. Prob.	Inter. Area
0	10	10	20	20	95.4	0.4357	95.4	0.00134
0	10	20	20	10	94.3	0.4236	94.4	0.00137
10	10	10	20	10	94.8	0.4642	94.7	0.00158
10	10	20	20	0	95.5	0.3460	95.4	0.00172
20	10	5	20	5	94.8	0.4469	94.7	0.00185
20	10	10	20	0	94.9	0.3533	94.7	0.00197
25	10	5	20	0	95.2	0.3558	95.6	0.00209
15	10	10	20	5	95.3	0.4125	95.7	0.00203

表 20 模擬結果， Gompertz 分配， $G(c,\lambda)$ 其中 $c=0.06, \lambda=0.01$

Multiple censoring					c's Average	c's Average	(c,λ) Average	(c,λ) Average
r	k	l	m	s	Cov. Prob.	Inter. Len.	Cov. Prob.	Inter. Area
5	30	5	15	5	95.7	0.2908	96.0	0.00115
5	30	10	15	0	96.2	0.2751	96.1	0.00116
0	30	10	15	5	95.3	0.2578	95.6	0.00105
3	30	5	15	7	95.8	0.2804	96.2	0.00112
5	15	5	30	5	94.5	0.3134	94.8	0.00120
5	15	10	30	0	95.0	0.2725	94.0	0.00112
0	15	10	30	5	95.1	0.2993	94.5	0.00111
3	15	5	30	7	95.0	0.3095	94.4	0.00115

參考論文

1. Andersen, P.K., Borgan, O. Gill, R. D., & Keiding, N. (1991). Statistical Models Based on counting Process (pp.412-413). New York: Springer-Verlag.

2. Balkrishnam, N. and Basu, A. P. (1995). The Exponential distribution Theory, Methods and Application. English: Gordon and Breach Publishers.

3. Chen, Z. (1997). Parameter estimation of the Gompertz population. Biometrical Journal, 33,117-124.

4. Chiang, C. L. (1968). Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics. New York: John Wiley.

5. Garg, M. L., Rao, B. R., and Redmond, C. K. (1970). Maximum likelihood estimation of the parameters of the Gompertz survival function. Journal of the Royal Statistical Society, C19, 152-159.

6. Gompertz, B. (1825). On the native of the function expressive of the law of human mortality and on the new mode of determining the value of life contingencies. Phil. Trans. R. Soc., A115, 513-580.

7. Gordon, N. H. (1990). Maximum Likelihood estimation for mixtures of two Gompertz distributions when censoring occurs. Communications in Statistics B: Simulation and Computation, 19, 733-747.

8. Makeham, W.M. (1860). On the law of mortality and the construction of a annuity tables. Journal of the Inctitute of Actuaries, 8, 301-310.

2001 年 11 月 28 日收稿
2001 年 11 月 28 日初審
2002 年 03 月 08 日複審
2002 年 05 月 28 日接受

附錄A

證明兩隨機變數

$$U_1 = 2[\sum_{i=r+3}^{r+k-1} Y_{(i)} + (n-r-k+1)Y_{(r+k)} + (2+r-n)Y_{(r+2)}]$$

和

$$V_1 = 2(n-r-1)(Y_{(r+2)} - Y_{(r+1)})$$

為互相獨立的。

證明：由於 $Y_1,\cdots,Y_n$ 為互相獨立的標準指數分配, $Y_{(1)},\cdots,Y_{(n)}$ 為其對應的順序統計量,

令：

$$Z_1 = 2nY_{(1)}$$

$$Z_2 = 2(n-1)[Y_{(2)} - Y_{(1)}]$$

$$\vdots$$

$$Z_r = 2(n-r+1)[Y_{(r)} - Y_{(r-1)}]$$

$$Z_{r+1} = 2[n-(r+1)+1][Y_{(r+1)} - Y_{(r)}]$$

$$Z_{r+2} = 2[n-(r+2)+1][Y_{(r+2)} - Y_{(r+1)}]$$

$$\vdots$$

$$Z_{r+k} = 2[n-(r+k)+1][Y_{(r+k)} - Y_{(r+k-1)}]$$

Balakrishnan 和 Basu(1995)所著書中第 9 頁可得知 $Z_1,\cdots,Z_{r+k}$ 為互相獨立的, 今取

$V_1 = Z_{r+2}$,

$$U_1 = \sum_{i=r+3}^{r+k-1} Z_i = 2[\sum_{i=r+3}^{r+k-1} Y_{(i)} + (n-r-k+1)Y_{(r+k)} + (2+r-n)Y_{(r+2)}]$$

故兩隨機變數V_1 與 U_1為互相獨立的隨機變數。 ■

附錄B

證明：

1. 由於(4)式中，$\xi_1=\dfrac{U_1}{(k-2)V_1}$ 具有自由度為 $2(k-2)$ 和 2 的 F 分配，

故有 $1-\alpha=P(F_{1-\alpha/2}(2(k-2),2)<\xi_1<F_{\alpha/2}(2(k-2),2))$

$$=P(F_{1-\alpha/2}(2(k-2),2)<\frac{\sum_{i=r+3}^{r+k-1}e^{cX_{(i)}}+(n-r-k+1)e^{cX_{(r+k)}}+(2+r-n)e^{cX_{(r+2)}}}{(n-r-1)(k-2)[e^{cX_{(r+2)}}-e^{cX_{(r+1)}}]}<F_{\alpha/2}(2(k-2),2))$$

故利用引理可得定理之結果

$$1-\alpha=P(\phi(X_{obs},F_{1-\alpha/2}(2(k-2),2))<c<\phi(X_{obs},F_{\alpha/2}(2(k-2),2)))$$

其中 $\phi(X_{obs},t)$ 為 $\dfrac{\sum_{i=r+s}^{r+k-1}e^{cX_{(i)}}+(n-r-k+1)e^{cX_{(r+k)}}+(2+r-n)e^{cX_{(r+1)}}}{(n-r-1)(k-2)[e^{cX_{(r+2)}}-e^{cX_{(r+1)}}]}=t$ 之解

2. 由於(4)式中 ξ_1 與 ζ_1 為互相獨立的，故上式可書為

$$1-\alpha=P(F_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2(k-2),2)\le\xi_1\le F_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2(k-2),2))\times P(\chi^2_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2(k-1))\le\zeta_1\le\chi_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2(k-1))$$

$$=P(F_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2(k-2),2)\le\xi_1\le F_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2(k-2),2),\chi^2_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2(k-1))\le\zeta_1\le\chi^2_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2(k-1)))$$

$$=P(F_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2(k-2),2)\le H_1(c)\le F_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2(k-2),2),\chi^2_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2(k-1))\le H_2(c,\lambda)\le\chi^2_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2(k-1)))$$

其中

$$H_1(c)=\frac{\sum_{i=r+3}^{r+k-1}e^{cX_{(i)}}+(n-r-k+1)e^{cX_{(r+k)}}+(2-r-n)e^{cX_{(r+2)}}}{(n-r-1)(k-2)[e^{cX_{(r+2)}}-e^{cX_{(r+1)}}]}$$

$$H_2(c,\lambda)=\frac{2\lambda}{c}\left[\sum_{i=r+2}^{r+k-1}e^{cX_{(i)}}+(n-r-k+1)e^{cX_{(r+k)}}+(1+r-n)e^{cX_{(r+1)}}\right]$$

故由引理得

$$P(\phi(X_{obs},F_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2(k-2),2))<c<\phi(X_{obs},F_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2(k-2),2)),\chi^2_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2(k-1))\le\frac{\lambda s_1}{c}\le\chi^2_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2(k-1)))$$

$$=P(\phi(X_{obs},F_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2(k-2),2))<c<\phi(X_{obs},F_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2(k-2),2)),\frac{c\chi^2_{\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2(k-1))}{s_1}\le\lambda\le\frac{c\chi^2_{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}(2(k-1))}{s_1})$$

故得證。 ■